**Variables aleatorias**

**Definición**

* Dado un experimento aleatorio, unha **variable aleatoria X** é unha aplicación que asocia a cada elemento dun elemento muestral un número.
* Exemplo: no experimento de lanzar un dado, a variable será ‘valor do dado’.
*  Sendo B o conxunto de todos os intervalos de R.

**Propiedades**

* Se X é unha variable sobre  e c é unha constante, c\*X tamén é unha variable.
* Se X e Y son variables sobre , X+Y e X\*Y tamén.

**Variable aleatoria discreta**

* Unha **variable aleatoria discreta** é aquela que toma valores nun conxunto finito (ou infinito numerable).
* O conxunto de posibles valores que toma denomínase **soporte** (**Sop(X)={x1, …, xk})**
* O conxunto de probabilidades de cada suceso denomínase **masa de probabilidade** {p1, …, pk}, onde pi = P(X=xi)
  + A suma de todos os pi debe ser 1.
  + Represéntase mediante un diagrama de barras.
  + Exemplo: nº de caras ao tirar dúas moedas: {0.25, 0.5, 0.25}
  + Menor valor ao lanzar 2 dados: {11/36, 9/36, 7/36, 5/36, 3/36, 1/36}
* As variables discretas pódense caracterizar polo seu soporte e as respectivas posibilidades.

**Función de distribución**

* A **función de distribución** de unha variable, continua ou discreta, asocia a cada número coa probabilidade de que X acade un valor menor ou igual ca ese número. **F(x)=Px(X<=x)**
* **Propiedades:**
  + F(x)€ [0,1]
  + F(x) no es decreciente y es continua por la derecha
  + F(+inf)=1 y F(-inf)=0
* Exemplos:
  + Lanzamento de 2 moedas: F(x)=0 se x<0, 0.25 se 0<=x<1, 0.75 se 1<=x<2, 1 se x>=2
  + Menor valor ao tirar 2 dados: F(x) =0 se x<1, 11/36 se 1<=x<2, 20/36 se 2<=x<3, 27/36 se 3<=x<4, 32/36 se 4<=x<5, 35/36 se 5<=x<6, 1 se x>=6.

**Medidas características (discreta)**

* **Esperanza matemática** (media): E(X)= μ = Sendo K o número de valores xi posibles e pi as súas respectivas probabilidades.
  + E(aX + b) = a\*E(X) + b
  + E(X+Y) = E(X)+E(Y)
  + Exemplo (moedas): 1/4 \*0 + 1\*2\*1 + ¼\*2 = 1
* **Mediana** (Me): Valor x que divide a idstribución en dúas metades iguais. F(Me)=0.5
* **Varianza:** , sendo E(X) a esperanza matemática
  + **Desviación típica:** Raíz da varianza
  + Var(ax + b) = a2Var(x)
  + Exemplo (moedas): (0-1)2\*¼ + (1-1)\*½ + (2-1)2\*¼ = 0.5
* **CV:** Desviación típica / media
* **Moda:** Valor para el cual la masa de probabilidad es máximo

**Variables tipificadas**

* Si tenemos una variable X con media μ y desviación típica σ, podemos transformarla en una variable Y de media 0 y varianza 1.
* Para **estandarizar** una variable, se resta la media y divide por la desviación típica: 

**Independencia de variables**

* Dos variables aleatorias X e Y son independientes si **FX,Y(x,y) = FX(x) \* FY(y)** para todos x,y reales.
* En el caso discreto, se dice que X e Y son independientes si **P(X=xi,Y=yj)=P(X=xi)\*P(Y=yi).**
* En el caso continuo, son independientes si fX,Y(x,y) = fX(x) \* fY(y)
* De ser independientes, se cumple que **E(XY)=E(X)\*E(Y)**, y **Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)**

**Experimento de Bernoulli**

* Aquel que solo presenta dos posibles resultados.
* Llamaremos éxito a uno de los resultados y fracaso al otro. La probabilidad de éxito será p.
* A variable X será o resultado, que vale 1 con probabilidad p e 0 con 1-p
* E(X)=p, Var(x) = p\*(1-p)
* Ejercicio: de los alumnos, un 20% se han estudiado el tema
  + Si asisten a clase 40 alumnos, el número medio que han estudiado es 40\*0.2 = 8 alumnos
  + Si asisten 20, 20\*0.2 = 4 alumnos

**Distribución binomial**

* Repetimos un experimento de bernoulli n veces e consideramos a variable X=nº de éxitos. **X ∊** **Bi(n,p) [[1]](#footnote-0)**
* A súa función masa de probabilidade será **P(X=x) = (n | x) px (1-p)n-x**
* E(X) = np
* Var(X) = np(1-p)
* **Propiedades:**
  + Para n=1, Ber(p) = Bi(1,p)
  + Si X∈Bi(n1, p), Y∈Bi(n2, p) independientes, entonces X+Y∈Bi(n1+n2, p).
  + Si X ∈ Bi(n, p) entonces X = Xi, donde Xi ∈ Ber(p) independientes

**Distribución geométrica**

* Repetimos un experimento de Bernoulli e consideramos a variable X=nº de fracasos ata o primeiro éxito. **X ∈ G(p).**
* A súa función masa de probabilidade será **P(X=x) = (1-p)x \* p**
* E(X) = (1-p) / p
* Var(X) = (1-p) / p2

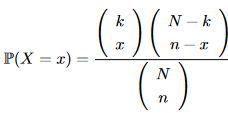
**Distribución binomial negativa**

* Repetimos un experimento de Bernoulli e consideramos a variable X=nº de fracasos ata o éxito **n**. **X ∈ BN(n,p).**
* A súa función masa de probabilidade será **P(X=x) = (n+x-1 | x) \* (1-p)x \* pn**
* E(X) = n(1-p) / p
* Var(X) = n(1-p) / p2
* Nota: G(X) equivale a BN(1,p)

**Distribución de Poisson**

* Un proceso de Poisson consiste en observar la aparición de sucesos en un soporte continuo, como el tiempo, cuando el número de sucesos en intervalo de tiempo, denotado por λ, se mantiene constante.
* Definimos X como el nº de sucesos en un intervalo fijado. **X ∈ Pois(λ)**
* La masa de probabilidad será P(X=x) =
* E(X) = Var(X) = λ
* A medida que aumenta el valor de λ, la variable se hace más simétrica.

**Distribución Hipergeométrica**

* Existe unha poboación de N elementos, dos cales k son de clase D e (N-k) son de clase D’. Tomamos unha mostra aleatoria de n elementos, sin reemplazamiento.
* Sea X la variable que indica el nº de elementos de clase D en la muestra. **X ∈ H(N, n, k).**
* O soporte será x **∈** {máx(0, n + k − N), mín(k, N)}
* ****
* E(X) = = np
  + Idéntico a una distribución binomial, pero la varianza es distinta. Debido a esto, si N es muy grande respecto a n, se puede aproximar por una distribución binomial.
* Var(X) = npq \*

**Distribución uniforme discreta**

* Si X toma valores {x1, …, xk} y todos tienen la misma probabilidad, se dice que X tiene una distribución **uniforme discreta, X ∈ U{x1, …, xk}**
* P(X=x) = 1/K para todos los x.
* E(x) = 1/K \* xi,
* Var(x) = 1/K \* (xi - μ)2

**Resumen distribuciones discretas**

| Nombre | Definición | MOP | E(X) | Var(X) |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Binomial Bi(n,p) | nº de éxitos tras repetir bernoulli n veces |  | np | np(1-p) |
| Geométrica G(p) | nº de fracasos hasta el primer éxito |  | q/p | q/p2 |
| Binomial negativa BN(n,p) | nº de fracasos hasta el n-ésimo éxito |  | nq/p | nq/p2 |
| Poisson Pois(λ) | nº de sucesos en un intervalo λ |  | λ | λ |
| Hiper - geométrica H(N,n,k) | con una población de N elementos, elementos de clase K en una muestra de tamaño n |  | nk/N = np |  |
| Uniforme U{x1,...xk} | valores con igual probabilidad | 1/K | 1/K \* xi | 1/K\*(xi - μ)2 |

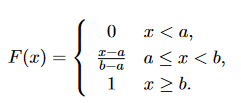
**Variable aleatoria continua**

* Una variable aleatoria continua es aquella que toma valores en un **intervalo** de la recta real.
* La función de distribución **F(x)** se define de misma forma que con una variable discreta: la prob. de que la variable sea menor o igual que x.
* La función de densidad **f(x)** funciona como generalización de la masa de probabilidad[[2]](#footnote-1) para el caso continuo. Se define como **f(x) = F’(x)**
  + La función de distribución en un punto se calcula como el área bajo la función de densidad, desde ese punto hasta el inicio del soporte de la variable.
  + **Propiedades:**
    - f(x)>=0
    - El área total bajo la función de densidad es 1
    - La probabilidad de un intervalo (a,b), (a,b] o [a,b] será el área bajo la curva f(x) entre a y b, es decir, .

**Medidas características (continua)**

* **Esperanza matemática** (media): E(X)= μ = 
  + Exemplo (moedas): 1/4 \*0 + 1\*2\*1 + ¼\*2 = 1
* **Mediana** (Me): Análogo a caso discreto. F(Me)=0.5
* **Moda:** Valor para el cual la densidad alcanza un máximo relativo. Mo=x0 si se cumple que f’(x0)=0, y f’’(x0)<0.
* **Varianza:** , sendo E(X) a esperanza matemática.
  + , 

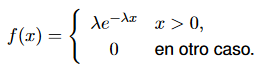
**Distribución uniforme continua**

* Si X toma valores en un intervalo (a,b), se dice que X tiene una distribución **uniforme continua, X ∈ U(a,b),** si su función de densidad es:
* Su función de distribución asociada será:
* E(X) =
* Var(X) =
* Su función de densidad será un segmento plano sobre el soporte de la variable, cuya altura será inversa a la longitud del soporte.

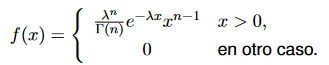
**Distribución Normal**

* Una variable aleatoria tiene distribución **normal**, X ∈ N (μ, σ2),si su función de densidad es:
* Se suele considerar la **distribución normal estándar**, de media 0 y varianza 1, X ∈ N(0,1), denotada por Φ(z).
  + 
  + Todas las variables normales se pueden transformar a una estándar, restando la media y dividiendo por la desviación típica. 
    - Ejemplo: si queremos calcular P(X<28), siguiendo X una distribución normal, es lo mismo que calcular P(Z<), siendo Z∈(0,1).
* Las distribuciones normales son aditivas: si tomamos X ∈ N(μ1, σ21) e Y∈N(μ2,σ22), entonces X+Y ∈ N (μ1+μ2, σ21+σ22)

**Distribución exponencial**

* Tenemos un proceso de Poisson de parámetro λ, y consideramos la variable X como el tiempo entre sucesos consecutivos. X sigue una distribución **exponencial** de parámetro λ: **X ∈ Exp(λ)**.
* X será continua y positiva.
* Su función de densidad será:
* F(x) = 1 - e-λx
* E(X) = 1/λ (λ es el número esperado de sucesos por unidad de tiempo)
* Var(X) = 1/λ2

**Distribución Gamma[[3]](#footnote-2)**

* Generalización de la distribución exponencial: mide el tiempo hasta la aparición del n-ésimo suceso. **X ∈ Γ(n, λ)**
* Su función de densidad será:
  + 
* E(X) = n/λ
* Var(X) = n/λ2
* Dos variables Gamma con el mismo λ son aditivas.

**Resumen distribuciones continuas**

| Nombre | Definición | f(x) | F(x) | E(X) | Var(X) |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Uniforme U(a,b) | probabilidad constante dentro de un intervalo |  |  |  |  |
| Normal N(0, 1) | - |  | área bajo la curva | - | - |
| ExponencialExp(λ) | Tiempo promedio entre sucesos de un proceso de Poisson de pár.λ |  |  | 1/λ | 1/λ2 |
| Gamma Γ(n,λ) | tiempo hasta la aparición del n-ésimo suceso |  | - | n/λ | n/λ2 |

**Teorema central del límite**

* El promedio de n variables independientes y que siguen la misma distribución (sea cual sea) con varianza finita sigue una **distribución normal**.
* Sea {Xi}i∊N una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con E(Xi)=μ y Var(Xi)=σ2 para todo i. Entonces, para n suficientemente grande:



* Por ejemplo, si X∊Bi(n,p), se puede escribir como , siendo cada Xi∊Ber(p).
  + Entonces, E(Xi)=p y Var(Xi)=pq para todo i.
  + Aplicamos el teorema central del límite, y obtenemos que X se puede aproximar por:
* Otro ejemplo, una distribución Gamma se puede expresar como , siendo cada Xi∊Exp(λ)
  + E(Xi)=1/λ y Var(Xi)=1/λ2 para todo i.
  + Aplicamos el teorema central del límite y obtenemos que X se puede aproximar por: 

**Corrección de Yates**

* Al aproximar distribuciones por la normal, debemos tener en cuenta que la binomial y la Poisson son distribuciones discretas y la Normal es continua.
  + En una binomial, podemos calcular P(X=20), pero en una normal esta probabilidad será nula.
* Para solucionarlo, se aplica la **corrección de Yates**:

**Aproximación de distribuciones**

| **Distribución** | **Caso** | **Aproximación** |
| --- | --- | --- |
| Bi(n,p) | n>=30, p<0.1 | Pois(np) |
| n>=30, p∊[0.1, 0.9] | N(np, npq) |
| n>=30, p>0.9 | Se transforma en Bi(n,1-p) |
| Pois(λ) | λ>=10 | N(λ,λ) |

1. Significa ‘X sigue una distribución binomial de parámetros n y p’. [↑](#footnote-ref-0)
2. Al ser una variable continua, se considera que la probabilidad de que la variable alcance un valor concreto es siempre 0. Por esto, se debe calcular siempre la probabilidad de que la variable se sitúe en un intervalo. [↑](#footnote-ref-1)
3. quoted saying que non entra no examen [↑](#footnote-ref-2)